

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

Scoala in Papuci

SUBIECTUL I

(30 puncte)

- 5p 1. Determinați numărul complex z pentru care $z - 2\bar{z} = iz - 1$.
- 5p 2. Demonstrați că mulțimea $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - (m+3)x + m + 2 = 0, m \in \mathbb{R}\}$ este nevidă.
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2x + \sqrt{16 + x^2} = 11$.
- 5p 4. Fie mulțimea $A = \{1, 4, 7, \dots, 100\}$. Aflați numărul submulțimilor cu cel mult două elemente ale mulțimii A .
- 5p 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(a;1), B(-1;0), C(3;5)$ și $D(5;6)$. Aflați numărul real a pentru care punctele B, D și mijlocul segmentului AC sunt coliniare.
- 5p 6. Aflați perimetrul triunghiului ABC știind că $AB = \sqrt{7}, AC = 2\sqrt{7}$ și $\angle A = \frac{2\pi}{3}$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 puncte)

1. Se consideră funcția $f: M_2(\mathbb{R}) \rightarrow M_2(\mathbb{R}), f(X) = X^2 - 3X + 2I_2$ și matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$.
- 5p a) Arătați că $\det(f(A)) = 4$.
- 5p b) Calculați $I_2 + A + A^2 + \dots + A^{2025}$.
- 5p c) Dacă $f(A) \cdot f(X) = I_2$ și $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, aflați $(f(X) + B^t)^{2026}$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x * y = xy - 2(x + y) + 6$.
- 5p a) Arătați că $2025 * 2 + 2 * 2026 = 4$.
- 5p b) Determinați elementul neutru al legii de compoziție.
- 5p c) Calculați $\frac{1}{2026} * \frac{2}{2026} * \frac{3}{2026} * \dots * \frac{4059}{2026}$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 puncte)

1. Fie funcția $f: (3, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 6x + 5 - \frac{1}{2} \ln(x-3)$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = \frac{(2x-7)(2x-5)}{2(x-3)}$, pentru orice $x \in (3, +\infty)$.
- 5p b) Notăm cu m suma dintre numărul punctelor de extrem și numărul punctelor de inflexiune ale funcției f . Arătați că $m = 1$.
- 5p c) Demonstrați că $4x^2 - 24x + 35 \geq 2 \ln(2x-6)$, pentru orice $x \in (3, +\infty)$.
2. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{4x^2 + 1}{x}$.
- 5p a) Arătați că funcția $F: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, F(x) = 2x^2 + \ln x + 2025$ este o primitivă a funcției f .
- 5p b) Determinați o primitivă G a funcției f cu proprietatea că graficul funcției G trece prin punctul $A(1, 2)$.
- 5p c) Demonstrați că, dacă $H: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ este o primitivă a funcției f , atunci are loc inegalitatea $H(\sqrt[3]{2025}) < H(\sqrt[3]{2026})$.